

〈一般研究課題〉 乱流渦におけるマルチスケールのトポロジー解析

助成研究者 愛知工業大学 中山 雄行



乱流渦におけるマルチスケールのトポロジー解析

中山 雄行
(愛知工業大学)

Topological analysis of vortices in decomposed multiscale flows in a turbulence

Katsuyuki Nakayama
(Aichi Institute of Technology)

Abstract :

The present analysis investigates the topological characteristics of vortices in decomposed flow scales in turbulent flow. Vortical features are analyzed in an isotropic homogeneous turbulence to study fundamental features of vortices in different flow scales. The turbulence is analyzed by the pseudo-spectral method in DNS (Direct Numerical Simulation), and the flow is decomposed into three types of scales using the band pass filter of the Fourier coefficients. The physical quantities associated with the vortical flow topology, such as swirlity or symmetry quantity, specify the vortical regions and detail flow topology. The analysis shows that vortices in respective flow scales have the similar feature in their topology and relationships between the development/decay of vortices and their flow symmetry. Vortices have a strong correlation between the intensity of swirling, i.e., swirlity, and the vortical flow symmetry in the swirl plane, and an intense vortex has a high flow symmetry. In addition, a vortex develops or decays in terms of swirlity with increase or decrease of the flow symmetry. These statistical characteristics are independent of the decomposed flow scales, thus they may be invariant features of vortical flow topology in the isotropic homogeneous turbulence in low Reynolds number.

1. はじめに

流れにおける渦は、自然科学のみならず文学や社会現象の表現においても用いられる親しみのある流れの様相である。万葉集等古くから短歌でも詠われ、世界遺産としても検討されている鳴門の渦の壮大なダイナミクスは、流体力学の研究者だけでなく多くの人々を魅了している。また、渦は、海洋、気象、宇宙における自然現象だけでなく、原子力・火力・風力等の発電、航空、船舶、建築構造物、エンジン等様々な分野の工学に関わり、これらの流れの特性に大きな影響を与える。

一方、この様に随分と親しみがある流れであるにも関わらず、実は渦には未だ統一された物理的定義が確立されていない。様々な渦の定義が提案されているが、理学また種々の工学分野における流れの渦の解析では、適用する渦定義によっては渦の有無が異なるという矛盾が生じ、この意味で渦中という言葉は渦の定義の様相にも少し当て嵌まるかもしれない。しかし、近年、一つの統一的な渦の定義が提案され[1]、更に渦の流れの様相(トポロジー)の詳細を定める物理量、即ち、旋回・吸込み流れの対称性と強さを示すswirlity, sourcity [2], 渦軸のeigen-vortical-axis-line[3]等が併せて定義されて、長年待ち望まれてきた渦の詳細なトポロジーの解析[4]や渦軸の特性の分析が可能となった。また、これにより、渦流の対称性(歪み)と渦の発達・減衰には強い相関があり、渦の発達には渦流対称性の向上が関わっていることが一様等方性乱流において示された[5]。

ところで、多くの流れは乱流であり、乱流は様々なスケールの流れにより分解・構成され、それぞれのスケールの流れで渦が存在し、相互に影響しあっていると考えられる。これらのスケールの渦のトポロジーと発達の関わりを明らかにすることは、乱流現象の解明だけでなく流れの評価技術や特定のスケール流れの制御に繋がる。

本研究では、乱流において流れをスケール分解し、それぞれのスケールにおいて渦を同定し、その渦のトポロジーについて解析する。乱流としては、渦の基本的特性を調べるものとして低レイノルズ数における一様等方性乱流を対象とする。本乱流の擬スペクトル法によるDNS(Direct Numerical Simulation)において、フーリエ係数のバンドパスフィルタを用いて流れをマルチスケールに分解し、それぞれのスケールの渦のトポロジー解析を行い、渦の強さとトポロジーの関係について分析する。渦の同定としては、渦流れのトポロジーの基本特性である「(ある点)軸の周りを旋回する渦流れであり、かつ慣性座標系に依存しないガリレイ不変の渦流れ」を渦とし、swirlityによりこの領域を同定する。本解析では、どのスケールの流れの渦においても渦の強さと渦流対称性は高い相関を有し、また、渦の発達・減衰には渦流対称性の増減が強く関わることを示された。従って、渦の強さ・発達とトポロジーに関するこれらの性質は、一様等方性乱流における低レイノルズ数ではスケールに依らない不変の性質であることが明らかとなった[6, 7]。また、渦の発生におけるswirlityとトポロジーの特性から渦流れのトリガーとなる流れを同定することが数理的に可能であるが[8-10]、スケール分解した流れにおいても同様な特性があることが確認された[11]。

2. ローカルトポロジーを定める物理量

流れの中のある一つの点の周りの流れの様相について考える。デカルト座標系 x_i ($i = 1, 2, 3$)において、速度場 v_i ($i = 1, 2, 3$)中のある一つの点を基準とした局所的(ローカル)な流れは、速度勾配テンソル ∇v ($= [\partial v_i / \partial x_j]$ ($i, j = 1, 2, 3$))を用いた

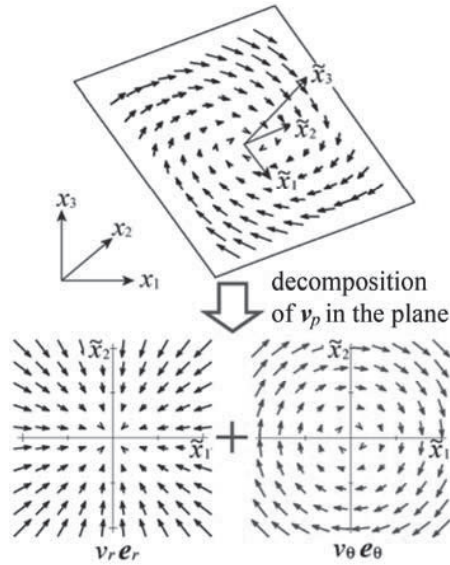


図1. ローカル流れにおける ∇v の実固有ベクトル ξ_a に非平行な平面上の v_θ と v_r の成分分解.

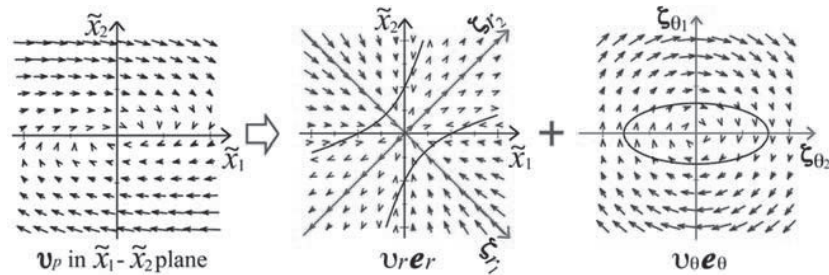


図2. ローカル流れにおける \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 平面上の流れの分解. v_θ と v_r の様相はそれぞれの実固有値と実固有ベクトルが定める. v_θ と v_r の流れ場中の曲線はそれぞれの二次形式の特性を示す. 本図は $0 < \lambda_{\theta 1}, \lambda_{\theta 2}$ の場合を示す.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} x_j \quad (1)$$

として表すことができる. ここで、式(1)並びに以降では総和規約を用いた表記とする. この式(1)より、 ∇v の固有値と固有ベクトルがこの周りの流れの様相を表すことが解る[2]. しかし、ここでは更に詳細なトポロジーを分析するためにswirlityと渦流対称性 c を導入する.

3次元の流れ場において、 ∇v は少なくとも一つの実固有値を有するが、この実固有ベクトル ξ_a に平行ではないある平面 \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 上の流れに着目し、本平面上のローカル流れ(速度) v_p を半径方向成分 v_r と周方向成分 v_θ にそれぞれ分解する. このイメージを図1に示す. このとき、 v_θ と v_r の成分は ∇v 成分 $\partial v_i / \partial x_j$ を用いた二次形式で表すことができる. この v_θ と v_r の二次形式の行列をそれぞれ A_θ と A_r と表すと、 A_θ と A_r はユニタリー行列であり、2つの実固有値と直交する実固有ベクトルを有する. これらの固有値と固有ベクトルにより v_θ 、 v_r の特性が判る[2, 5]. 即ち、この固有値の大きさと固有ベクトル方向により v_θ 、 v_r の特性が与えられる. 例えば、 v_θ の実固有値 $\lambda_{\theta i}$ ($i = 1, 2$)が共に同符号であれば、この平面の全周で同方向の周方向流れが存在することを示し、即ち旋回流れであることが解る. この例を図2に示す. 図2において、 e_r と e_θ は半径・周方向の単位ベクトル、 ξ_{r1} 、 ξ_{r2} ($i = 1, 2$)は A_r と A_θ の実固有ベクトルをそれぞれ示す. swirlity φ は v_θ の強さと対称性を示す物理量で、 A_θ の実固有

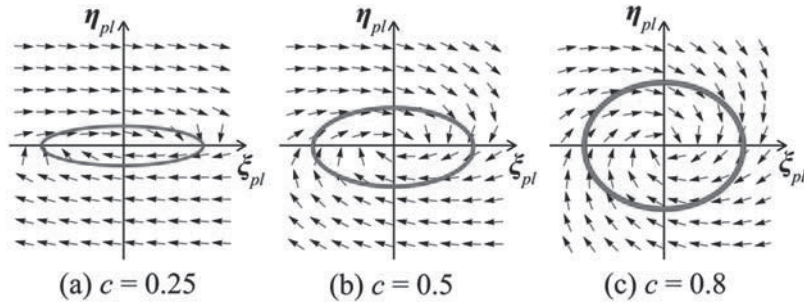


図3. c による旋回(ξ_p - η_p)平面上のトポロジーの相違. (a) $c=0.25$, (b) $c=0.5$,
また(c) $c=0.8$ であり、楕円はその対称性(歪み)の程度を示す。

値 $\lambda_{\theta}(i=1, 2)$ の同符号性と相乗平均的な強さを示す。これは、 ∇v の実固有ベクトル ξ_a に非平行な任意の平面において不変であり、即ちガリレイ不変の物理量となる。

また、 v_{θ} に関する A_{θ} の実固有値 $\lambda_{\theta}(i=1, 2)$ の比の平方根を c とすると、これが v_{θ} の歪み度を表す不変量となり、これにより渦流の対称性($0 < c \leq 1$)を特定できる。図3は、 c により渦流の対称性が変化する例を示したものであり、 c が1に近づくると渦流は軸対称的なものとなる。このとき、 ∇v は実固有値の他に共役複素固有値を有し、この複素固有値の固有ベクトル $\xi_p \pm i\eta_p$ (i : 虚数)の実・虚ベクトル ξ_p, η_p にて張られる平面が旋回平面となる。また、このとき、複素固有値の虚部は φ に等しく、 c は ξ_p, η_p の長さの比となる[2]。

3. 一様等方性乱流におけるDNSとマルチスケールトポロジー渦流解析

複数のスケールの流れにおける渦のトポロジー解析を一様等方性乱流において行う。一様等方性乱流は、擬スペクトル法によるDNS (Direct Numerical Simulation)により解析する。256³ 節点からなる解析領域(2π)³において、波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ の波数 $k = (k_i k_i)^{1/2}$ は $k < 121$ とし、phase shifting methodによりエイリアスエラーを除去する[5]。

流れのスケール分解は、速度や速度勾配テンソル等の物理量のフーリエ係数に関するバンドパスフィルタにより行う。即ち、ある3次元関数 $g(\mathbf{x})$ のフーリエ係数を $f(\mathbf{k})$ とすると、波数 k_s, k_i ($k_s < k_i$)の間の波数帯 $k_s \leq k < k_i$ における関数 $g'(\mathbf{x})$ は以下の式により与えられる。

$$g'(\mathbf{x}) = \sum_{k_s \leq k < k_i} f(\mathbf{k}) \exp(ik_j x_j) \quad (j=1, 2, 3) \quad (2)$$

ここでは、流れを表1に示す3つのスケールに分解する。表1において、全波数による流れ、即ち波数帯の制限を行わない流れは、スケール分解を行わない流れである。

各々のスケールにおける渦流解析を行ってトポロジーを同定し、テイラーレイノルズ数 $Re_{\lambda} \approx 35$ における各スケールの渦領域($\varphi = 3$)のコンターを図4に示す。以降では、 φ は、それぞれのスケール

表1:流れスケールの波数帯

No.	スケール	波数域
1	分解なし	$0 \leq k \leq 120$ (全波数)
2	大スケール	$8 < k \leq 16$
3	中スケール	$20 < k \leq 40$
4	小スケール	$60 < k \leq 120$

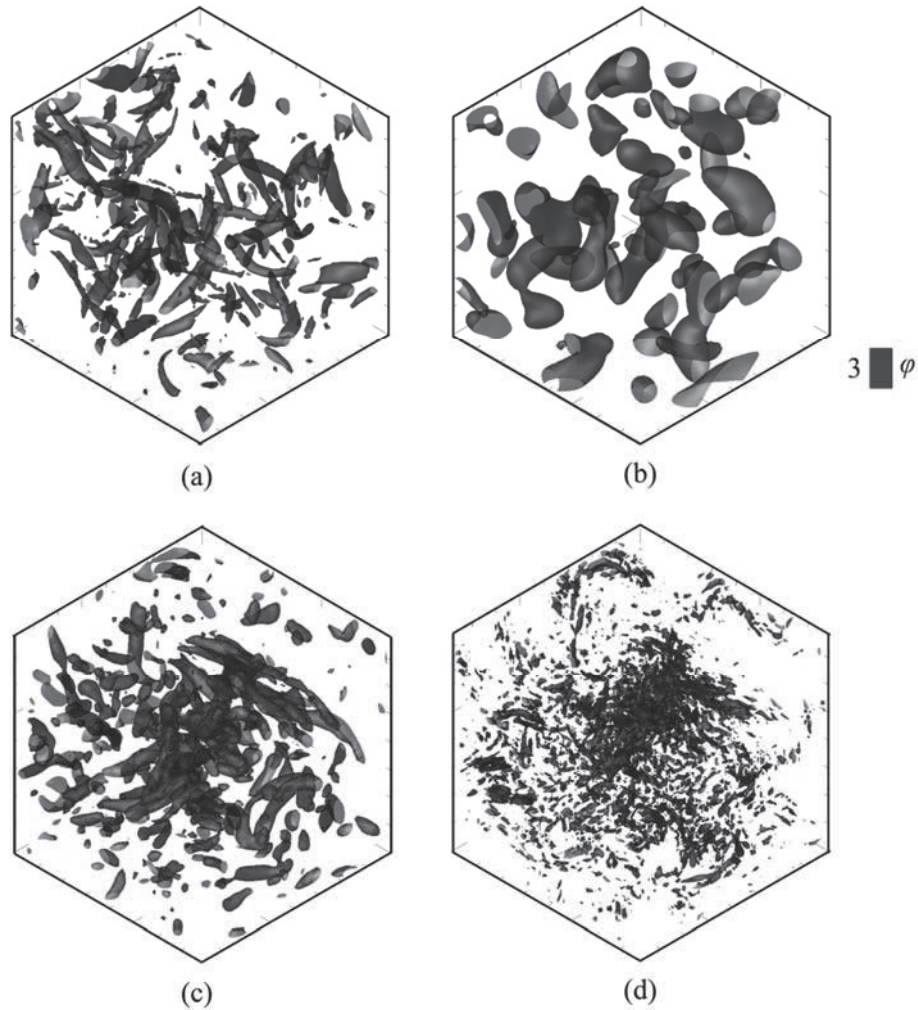


図4. 全波数、各スケール流れにおけるswirlity (φ)のコンター($\varphi=3$).
(a)全波数流れ, (b)大スケール, (c)中スケール, (d)小スケール.

ルにおける渦領域の φ のroot mean square 値にて無次元化を行っている。図4によると、渦領域の形状はスケール流れにより異なる。大スケールの渦領域では丸みを帯びたコンターとなり、中スケールの渦領域のコンターは全波数流れのものに類似し、そして小スケールでは細かなコンターとなる。次に、各スケールにおけるローカルトポロジーの特性について解析するものとし、渦強さとトポロジーとの相関をJPDF (Joint Probability Density Function) により分析する。 $Re_\tau \approx 95$ において、全波数流れ、並びに各スケール流れにおける渦の強さ φ と渦流対称性 c に関するJPDFを図5にそれぞれ示す。図5によると、まずスケール分解しない全波数における流れの渦では、渦の強さと渦流対称性の関係には高い相関があることが解る。また、スケール分解した流れにおいても同様に渦の強さと渦流対称性の関係には高い相関があり、渦が強いと相応に渦流対称性が高くなることが解る。図4の様に渦領域のコンターは各スケール流れで異なるものの、ローカルトポロジーでは渦の強さと渦流対称性の関係には類似性がある。即ち、渦強さが発達するためにはそれに応じて渦流対称性が発達しなければならない[6, 7]。図5におけるそれぞれのJPDFの相関係数は、スケール分解なしの流れ(全波数(a))の渦において0.75、大中小スケールの渦においてそれぞれ(b) 0.88, (c) 0.85, (d) 0.79である。

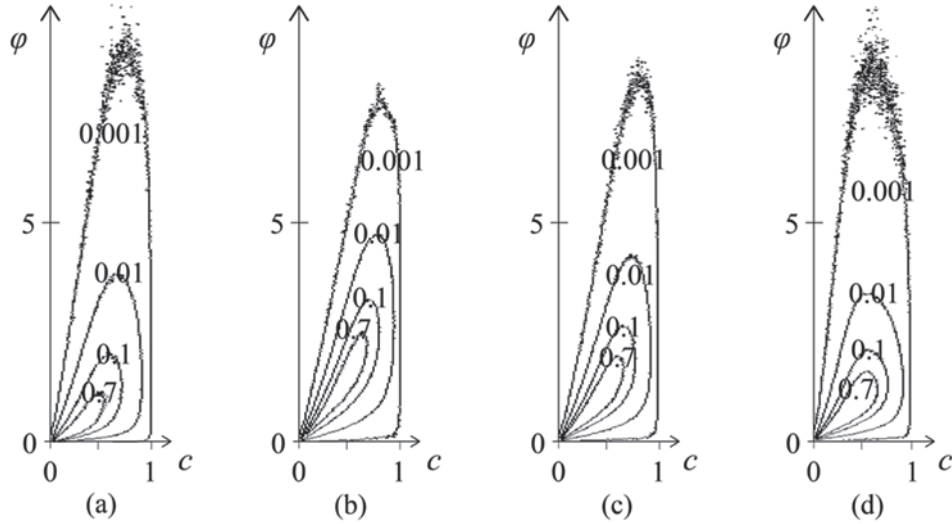


図5. 全波数、各スケール流れにおける φ と c のJPDF. (a)全波数流れ, (b) 大スケール, (c) 中スケール, (d) 小スケール.

4. 考 察

4.1 渦の発達に関わるトポロジー

前章の図5で示した様に、一様等方性乱流の渦流、またスケール分解された各スケール流れの渦流では、渦の強さと渦流対称性の関係には高い相関があり、共に発達・減衰する傾向がある。特に渦が弱い領域では、 φ と c のJPDFの確率密度が高い領域が直線状となっており、強い相関で共に変化する。

渦の発達・減衰と渦流対称性の時間変化において、それぞれのコルモゴロフ時間で無次元化したこれらの時間微分のJPDFを図6に示す。本図では、非分解の流れ、また各スケール流れの渦のいずれにおいても $\partial\varphi/\partial t$ と $\partial c/\partial t$ には高い相関が観られる。図6におけるそれぞれのJPDFの相関係数は、スケール分解なしの流れ(全波数(a))の渦において0.72、大中小スケールの渦においてそれぞれ(b) 0.8, (c) 0.78, (d) 0.77である。従って、渦のトポロジーにおいて渦流対称性の変化は渦の発達・減衰において重要な要素であることが解る。

以上より、渦強さと渦流対称性はスケールに依らず統計的に共に発達・減衰する特性を有することが示された。この関連に基づく渦強さとトポロジーのダイナミクスに関するイメージを図7に示す。

4.2 渦の生成予測に関わるトポロジー

swirlity φ は、ローカル流れの周方向成分の対称性と強さを示す物理量であるが、これを用いて渦の渦生成のプロセスのトポロジー解析が可能である[8]。即ち、 φ の符号が負から正に変わる領域は渦流れが発生した領域であり、これらの領域におけるトポロジーの変化や速度勾配テンソル ∇v の時系列変化を解析することにより、渦発生過程を分析することができる。図8は、swirlity φ が負から正に変化する際の旋回平面(渦発生後)となる平面におけるローカル流れの変化の様相を示す。抽出した周方向成分流れのトポロジーでは、渦流れの発生を明確に確認できる。このとき、渦発生トリガーとなる流れ・速度勾配テンソル成分を特定できるが[9]、ここではスケール分解した流れにおける渦発生の本特性について記述する。

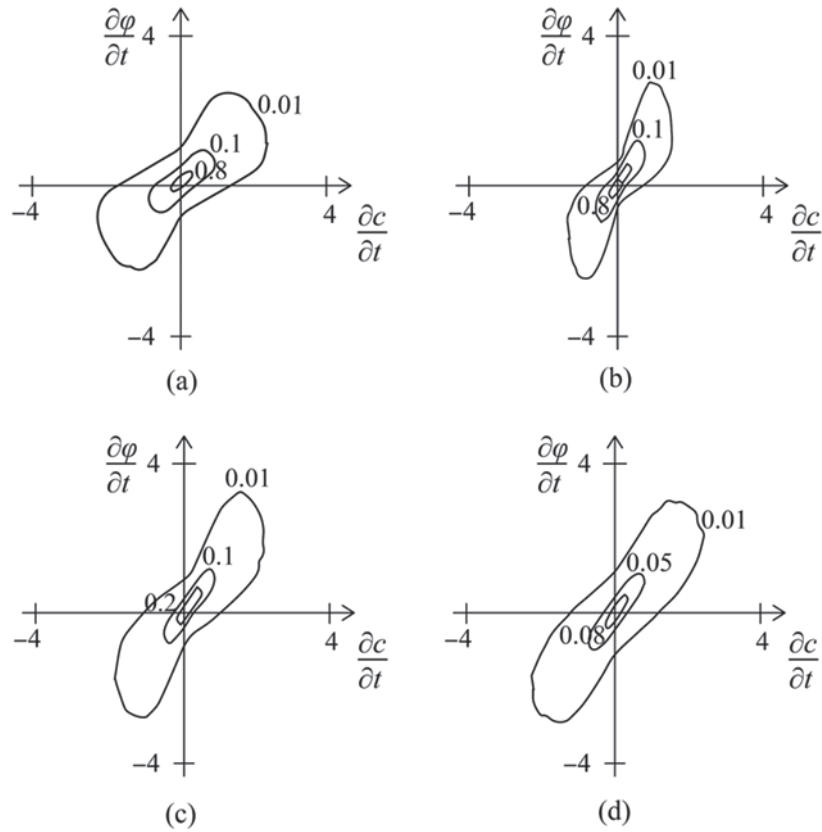


図6. 全波数、各スケール流れにおける $\partial\phi/\partial t$ と $\partial c/\partial t$ のJPDF.
(a)全波数流れ, (b)大スケール, (c)中スケール, (d)小スケール.

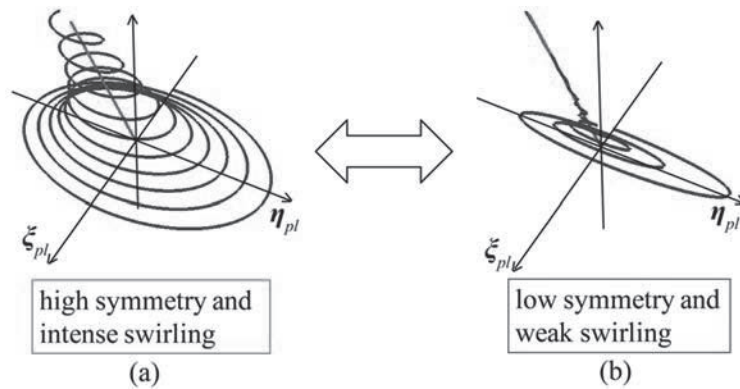


図7. 渦の発達・減衰のモデル. 渦の強さ ϕ とそのトポロジーの渦流対称性 c は共に発達・減衰し、この特性はスケールに依らない.

swirlity ϕ が負の値である渦の発生前において、 $\nabla\mathbf{v}$ の固有値 λ_i ($i = 1, 2, 3$)は全て実数であるが、ここで λ_1 と λ_2 が同符号であるとする。正規直交基底 \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$)として \mathbf{e}_1 を λ_1 の固有ベクトル ξ_1 に平行にとり、 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 平面を λ_1 と λ_2 の固有平面とすると、この座標系における速度勾配テンソル $\nabla\mathbf{v}$ ($=\mathbf{A}=[\partial v_i/\partial x_j]=[a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 3$))は以下の形式で表される。

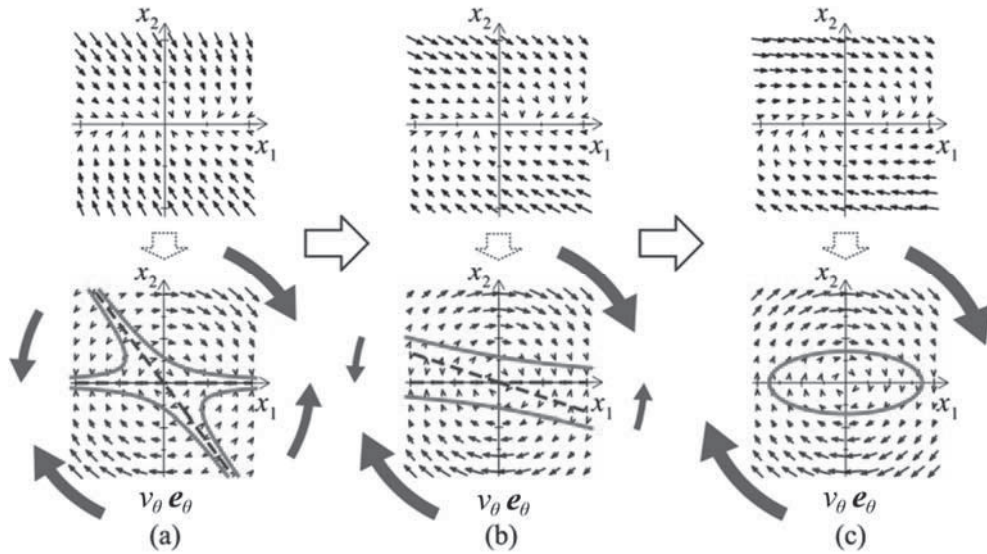


図8. 渦流遷移における(予測された旋回平面上的)トポロジー変化. 下図は v_θ の様相とこの二次形式の曲線の特徴を示す. (a) ($\varphi < 0$)の状態から(c)への遷移において φ が増加し、(c)では $0 < \varphi$ となって渦流れが発生する.

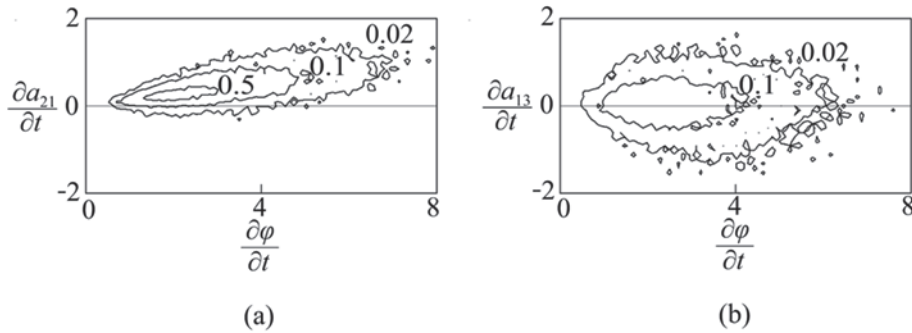


図9. 小スケール流れにおける $\partial\varphi/\partial t$ と速度勾配テンソル成分 $\partial a_{ij}/\partial t$ のJPDF. (a) ($\partial\varphi/\partial t, \partial a_{21}/\partial t$), (b) ($\partial\varphi/\partial t, \partial a_{13}/\partial t$).

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\omega_3 & \omega_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 ω_i ($i = 1, 2, 3$)は本座標系における渦度ベクトル成分を示す。 e_1 - e_2 平面上で渦が発生するとき、成分 a_{21} が a_{12} に対して反対の符号の成分となることが渦流れとなる条件となる[8-10]。

分解されたスケール流れにおいて、本スケールにおけるこの座標系を定義して速度勾配テンソル成分と φ の時間微分のJPDFを評価する。即ち、渦が発生する直前における a_{ij} と φ の双方の時間微分について解析し、渦発生と相関の高い速度勾配テンソル成分について分析する。図9は、小スケールの渦発生において、 $a_{12} (= -\omega_3) < 0$ であるときの a_{21} と a_{13} に関する φ との時間微分のJPDFを示している。 $\partial a_{13}/\partial t$ は $\partial\varphi/\partial t$ との間に相関はない。本成分は渦発生後の渦軸(∇v の実固有ベクトル ξ_a)の傾きに関わる成分であるが、渦発生時には渦軸方向の変化が統計的にないことを示している。一方、 $\partial a_{21}/\partial t$ は $\partial\varphi/\partial t$ と非常に高い相関を有している。即ち、渦になるときは a_{21} が a_{12} と反対の符号の値になることが解る。これは、 e_1 - e_2 平面で渦流となるためには欠かせない条件であり、渦発生のトリガーとなる流れである。また、本座標系の e_1 - e_2 平面は ∇v の固有ベクトルから特定される固有空間であるから、成分 a_{21} は慣性座標系に依らない不変の方向のせん断成分である。この解析は、

スケール分解しない全波数の流れと同様に、スケール分解した流れにおいても渦発生のトリガーとなる流れの成分を特定できる可能性を示唆している[11]。

5. 結 言

低テイラーレイノルズ数の一様等方性乱流におけるスケール分解した流れでは、渦領域の形状は各スケール流れで異なるが、ローカルトポロジーでは渦の強さと渦流対称性の関係には高い相関がある。即ち、渦強さが発達するためにはそれに応じて渦流対称性が発達し、渦の発達／減衰のためにはトポロジー上の条件として渦流対称性の向上／低下が伴う。これは、低テイラーレイノルズ数の本乱流において、スケールに依らないトポロジーの不変の性質と考えられる。

参考文献

- [1] K. Nakayama, K. Sugiyama, and S. Takagi, “A unified definition of a vortex derived from vortical flow and the resulting pressure minimum”, *Fluid Dynamic Research*, 46, 055511, 2014.
- [2] K. Nakayama, “Physical properties corresponding to vortical flow geometry”, *Fluid Dynamic Research*, 46, 055502, 2014.
- [3] K. Nakayama and H. Hasegawa, Relationships between eigen-vortical-axis line and vorticity line, *Fluid Dynamic Research*, 50, 011417, 2018.
- [4] H. M. Blackburn, N. N. Mansour, and B. J. Cantwell, Topology of fine-scale motions in turbulent channel flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 310, 269, 1996.
- [5] K Nakayama, “Topological features and properties associated with development/decay of vortices in isotropic homogeneous turbulence”, *Physical. Review Fluids*, 2, 014701, 2017.
- [6] K. Yamamoto and K. Nakayama, “Relationships between development/decay of a vortex and its topology in different flow scales in an isotropic homogeneous turbulence”, *The 70th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Fluid Dynamics*, 2017.
- [7] K. Yamamoto and K. Nakayama, “Topological features of multi-scale vortices in isotropic homogeneous turbulence”, *Fourteenth International Conference on Flow Dynamics*, 2017.
- [8] K. Nakayama and L. D. Mizushima, “A numerical analysis for identification of flow transition in vortex generation in terms of local flow topology”, *Journal of Fluid Science and Technology*, 12(3), 17-00134, 2017.
- [9] K. Nakayama, “Invariant feature of swirlity and trigger flow in vortex generation in terms of local flow geometry in isotropic homogeneous turbulence”, *International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM) Symposium on Dynamics and Topology of Vorticity and Vortices*, 2017.
- [10] K. Nakayama, “Topological effect in vortex transition in an isotropic homogeneous turbulence”, *Fourteenth International Conference on Flow Dynamics*, 2017.
- [11] K. Nakayama, “Identification of key flow for vortex generation in terms of local flow geometry”, *The 70th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Fluid Dynamics*, 2017.