〈一般研究課題〉　環境情報の確率論的
数値シミュレーションに関する研究
助 成 研 究 者　名古屋市立大学　草間　晴幸

環境情報の確率論的数値シミュレーションに関する研究

草間 晴幸
（名古屋市立大学）

Stochastic Numerical Simulation of Environmental Information

Haruyuki KUSAMA
(Nagoya City University)

Abstract:

The solid, fluid and thermal informations are treated in the field of environmental informatics. The design of structures and structural members studied in the region of solid information have been performed in a deterministic way, i.e. under the assumption of given loads acting on structures and structural members with given properties, which results in unique displacements and internal forces. During the whole life of the structure it is however clear that the loading is not unique and that the material properties are not accurately determined in advance. For these reasons a certain variability in the loading as well as in structural properties could have to be taken into account. This results in a stochastic analysis, a probabilistic design and a reliability design. In this article, a stochastic simulation method on the stability analysis of the structural system with one-degree of freedom is reported, which is the basis of the stochastic finite element method. This problem leads to the eigenvalue problem. The system with multi-degree of freedom requires the solution of simultaneous eigenvalue equation. But, in the case that the system has one-degree of freedom, the closed-form solution is obtained. The aim of this article is to present the stochastic simulation technique for the parameters in the closed-form solution and give the basic computational ideas supporting the ordinary finite element analysis. Also, the effective visualized performance for the obtained results is shown with the MATLAB software.

1. はじめに

環境情報の範疇である物理量は、固体情報、流体情報、熱情報などである。これらは長い間確定

論的に取り扱われてきた。例えば、固体情報の対象である構造物や構造部材の解析では、確定的な構造寸法と材料特性を有する構造物や構造部材に確定的な荷重が作用し、解析のアウトプットとしては確定的な応力や変位が計算された。

しかしながら、それらの耐用年数の間において、構造寸法は縮小などの変化をするであろうし、材料特性は劣化するであろう。また、作用する荷重は確定論的に一定ではなく、本来バラツキのある不確定量である。これらのことから、種々のパラメーターを確率論的に取り扱う確率論的解析方法や確率論的設計方法が、延いては信頼性設計法が生まれてきたことは周知のことである。

一方、ハードウェア、ソフトウェア両面からコンピュータの性能が著しく発展し、様々な現象を廉価に、かつまた、高速にシミュレーションする研究が発展した。特に、その汎用性から、計算力学の代表的な手法である有限要素法は、環境情報の範疇であるほとんどの分野の解析を可能にした。環境情報は、最終的に概ね、連立方程式か固有方程式に変換されるが、いずれの方程式の解法に対しても良好な精度をもたらしている。

上記の、確率論的手法の必要性と有限要素法の発展が相乗し、確率変数を有する微分方程式や偏微分方程式を離散化した確率有限要素法なる解析手法が生まれたが、最終的に解くべき方程式が固有方程式になる場合は、解が収束するまでに多大な繰り返し計算が必要となる問題点を残している。

本研究では、有限要素法の原点である1自由度を有する構造システムの安定解析問題の確率論的シミュレーションの結果を報告する。この問題は本質的に固有値問題であり、多自由度の場合には連立固有方程式を解くことになるが、1自由度ゆえに閉じた解を求め、その解に含まれる複数個のパラメーターが確率変数である場合のシミュレーション手法を示し、一般的な確率有限要素解析への指針的資料を提供することが目的である。また、確率論的シミュレーションは、通常、最確値とバラツキの度合いだけがアウトプットされ、解析結果を評価する者にとっては味気ない作業になるが、本研究では、欧米で非常によく利用されているプログラミング指向可視化ソフトウェアを利用し、訴求力のある解析結果の表現方法を提示する。

2. 安定解析問題の解析的アプローチ

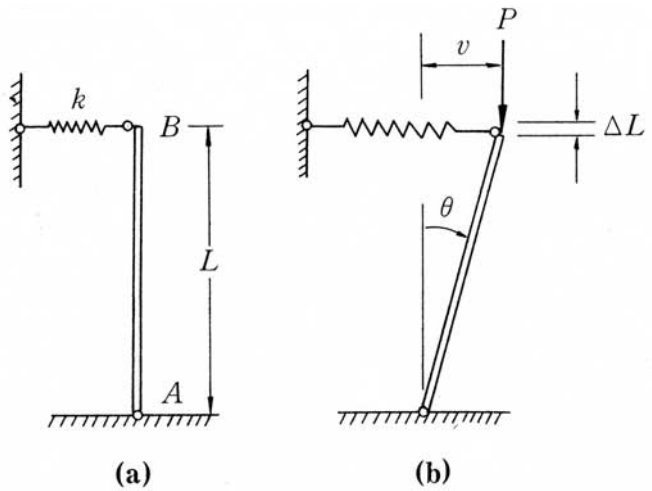

Fig.1

1自由度を有する構造システムとして、Fig.1に示す剛体棒ーバネモデルを考える。剛体棒の長さはL、バネの弾性係数はk、作用荷重がPである。このシステムの臨界荷重はPcr = kL であり、臨界荷重に達すると回転角変位 θ が発生する。この臨界荷重より大きい荷重をQ とすると、Qとk が確率変数である場合の不安定性に対する性能関数は次式となる。

$$Z(Q,k) = kL - Q \tag{2-1}$$

Q と k が相関のある正規確率密度関数である場合、原点周りの性能関数の結合密度関数は次式となる。

$$p_Z(Z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} e^{\frac{-1}{2}[(\frac{Z_0-\mu_Z}{\sigma_Z})^2]} \tag{2-2}$$

上式中のパラメーターは以下の平均値と分散を意味する。

$$\begin{aligned} \mu_Z &= L\mu_k - \mu_Q \\ \sigma_Z^2 &= \sigma_Q^2 - 2\rho\sigma_Q L\sigma_k + L^2\sigma_k^2 \end{aligned} \tag{2-3}$$

式(2-2)に対する累積確率関数は次式となる。

$$F_Z(Z_0) = \Phi(\frac{Z_0-\mu_Z}{\sigma_Z}) \tag{2-4}$$

また、破壊確率は以下の式となる。

$$P_f = 1 - F_Z(Z_0) = 1 - \Phi(\frac{Z_0-\mu_Z}{\sigma_Z}) \tag{2-5}$$

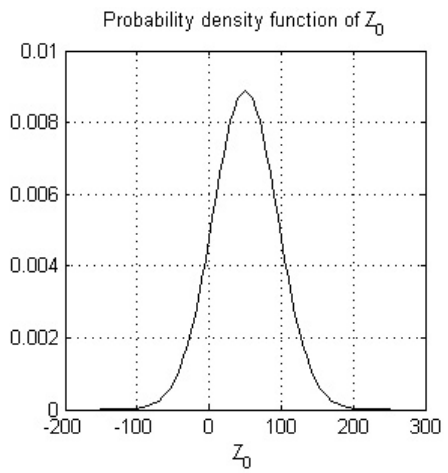

Fig.2

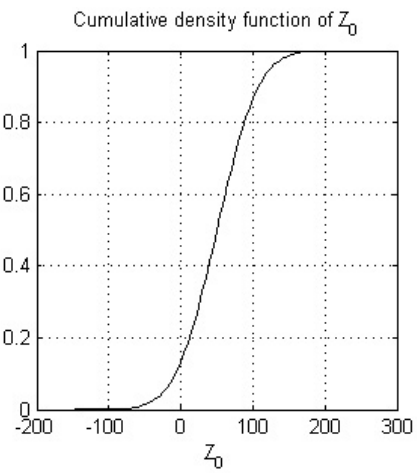

Fig.3

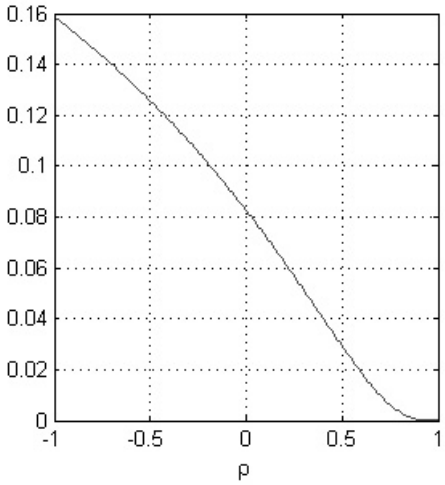

Fig.4

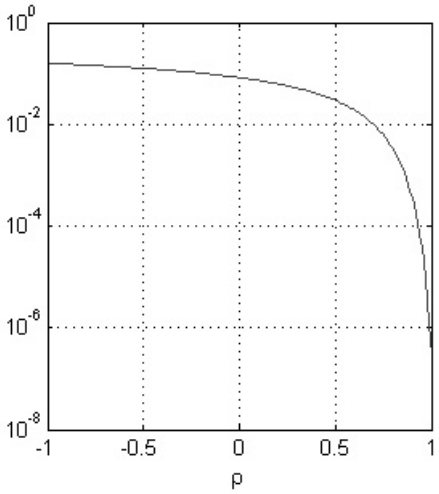

Fig.5

数値シミュレーションのために以下のパラメーター値を使用する。

$$\mu_k = 150kN/m, \sigma_k = 20kN/m$$
$$\mu_Q = 100kN, \sigma_Q = 30kN$$
$$L = 1m, \rho = -0.6$$

この場合の確率密度関数と累積確率関数をFig.2とFig.3に示す。

また、相関係数 ρ の差異による破壊確率の変化の様子をFig.4とFig.5に示す。

3. 安定解析問題の信頼性解析

前節で取り扱った問題を、1次近似2次モーメント手法を利用してシミュレーションする。そのための計算アルゴリズムは以下のステップバイステップの手順となる。なお、対象としているシステムは1自由度系であるが、多自由度系のシステムにも以下の手法が適用できるように、一般式の部分はベクトル表示を用いて表現する。

Step 1 ：以下で定義される新たな換算変数を導入する。

$$\{\hat{x}\} = [A](\{x\} - \{\mu_x\}) \tag{3-1}$$

ここで、[A]は以下の条件を満たす変換行列である。

$$[A][V_x][A]^T = [I] \tag{3-2}$$

$$[V_x] = \begin{bmatrix} \sigma_k^2 & \rho\sigma_L\sigma_k \\ \rho\sigma_k\sigma_L & \sigma_L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & 1.2 \\ 1.2 & 0.01 \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

共分散マトリックス[Vx]の固有ベクトルと固有値は次式となる。

$$[V] = \begin{bmatrix} 0.003 & -1 \\ -1 & -0.003 \end{bmatrix} \qquad [D] = \begin{bmatrix} 0.0064 & 0 \\ 0 & 400.0036 \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

したがって、行列[A]は次式のようになる。

$$[A] = ([V][D]^{\frac{-1}{2}})^T = \begin{bmatrix} 0.0375 & -12.5 \\ -0.05 & -0.00015 \end{bmatrix} \tag{3-5}$$

実際の物理変数と換算変数の関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} k &= 0.00024\hat{k} - 20\hat{L} + 150 \\ L &= -0.08\hat{k} - 0.06\hat{L} + 1 \end{aligned} \tag{3-6}$$

換算破壊条件は次式となる。

$$\hat{G}(\hat{k}, \hat{L}) = -1.92 \times 10^{-5}\hat{k}^2 + 1.2\hat{L}^2 + 1.6000144\hat{k}\hat{L} - 12.00024\hat{k} - 29\hat{L} + 60 \tag{3-7}$$

Step 2 ：設計点の初期値は実際の物理変数の平均値とする。すなわち、

$$\hat{x}^{(0)} = (0, 0), \quad i.e. \quad x^{(0)} = (150, 1) \tag{3-8}$$

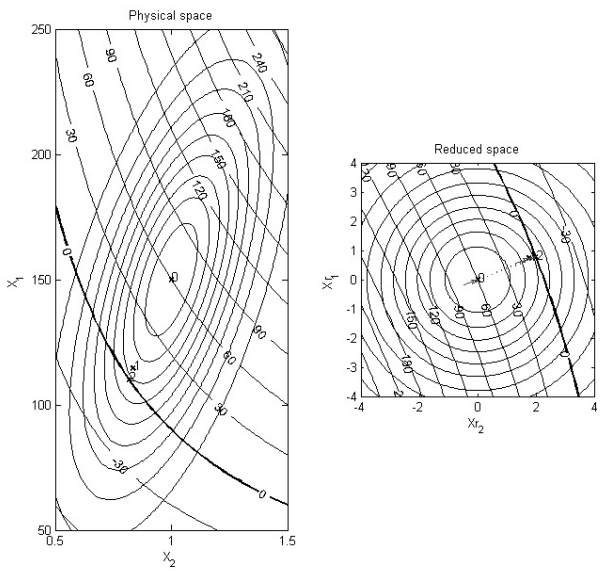

Fig.6

この点が Fig.6 の中で示される。Fig.6 の左の図はkとLの実物理空間の結合確率密度関数のレベル曲線であり、右の図はそれに対応する換算空間である。実物理空間の変数が相関性を有しているために結合確率密度関数の主軸は湾曲している。換算空間においては湾曲がない。同図に性能関数を表すレベル曲線も示されている。破壊条件はゼロレベルに対応する特性曲線である。この場合は非線形曲線である。換算空間上の破壊条件を表す曲線は非線形性がそれほど高くないことが判る。また、1次近似2次モーメント法の妥当性も認められる。

Step 3 ：実物理空間の原点は破壊条件の曲線上にはない。換算空間上におけるこの点の位置は次式を意味している。

$$\hat{G}^{(0)} = 60 \tag{3-9}$$

Step 4 ：換算空間上におけるこの点の勾配を計算する。

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{k}} = -3.84 \times 10^{-5}\hat{k} + 1.6000144\hat{L} - 12.00024 \tag{3-10}$$

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{L}} = 2.4\hat{L} + 1.6000144\hat{k} - 29 \tag{3-11}$$

これらの式に対して、繰り返し計算の初期パラメーターが以下の式で定義される。

$$n_1^{(0)} = \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{k}}(\hat{k}=0, \hat{L}=0) = -12.00024 \quad ; \quad n_2^{(0)} = \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{L}}(\hat{k}=0, \hat{L}=0) = -29 \tag{3-12}$$

このベクトルはFig.6 の換算空間の中において矢印記号で示されている。

Step 5 ：上の初期パラメーターを用いて新たな方向つまり単位ベクトルが定義される。

$$|n^{(0)}| = \sqrt{(-12.00024)^2 + (-29)^2} = 31.385 \tag{3-13}$$

$$\left\{\alpha^{(0)}\right\} = \frac{\{n^{(0)}\}}{|n^{(0)}|} = \left(\frac{-12.00024}{31.385}, \frac{-29}{31.385}\right) = (-0.3823, -0.9240) \tag{3-14}$$

Step 6 ：破壊条件の平均値と標準偏差により信頼性指標と破壊確率の近似値が計算される。

$$\mu_G = \hat{G}^{(0)} - \sum_{i=1}^{N} n_i^{(k)} \hat{x}_i^{(k)} = 60 \tag{3-15}$$

$$\sigma_G = \alpha_1 \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{L}} + \alpha_2 \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{k}} = |n^{(0)}| = 31.385 \tag{3-16}$$

$$\beta^{(0)} = \frac{\mu_G}{\sigma_G} = 1.9118 \tag{3-17}$$

$$P_f = \Phi^{-1}(-\beta^{(0)}) = 2.7954 \times 10^{-2} \tag{3-18}$$

Step 7 ：最終的に、設計点の新しい近似値が次式で計算される。

$$\left\{\hat{x}^{(1)}\right\} = -\left\{\alpha^{(0)}\right\}\beta^{(0)} = (0.7309, 1.7665) \equiv \left\{\hat{k}^{(1)}, \hat{L}^{(1)}\right\} \tag{3-19}$$

この点はFig.6の上で×印と数字の1で表されている。この点が次の繰り返し計算の出発点となる。Fig.6 では到達点までの収束が迅速であることが判る。このことは破壊条件の非線形性が僅かであることを示している。この節で示したシミュレーション手法によって得られた結果と前節で得られ

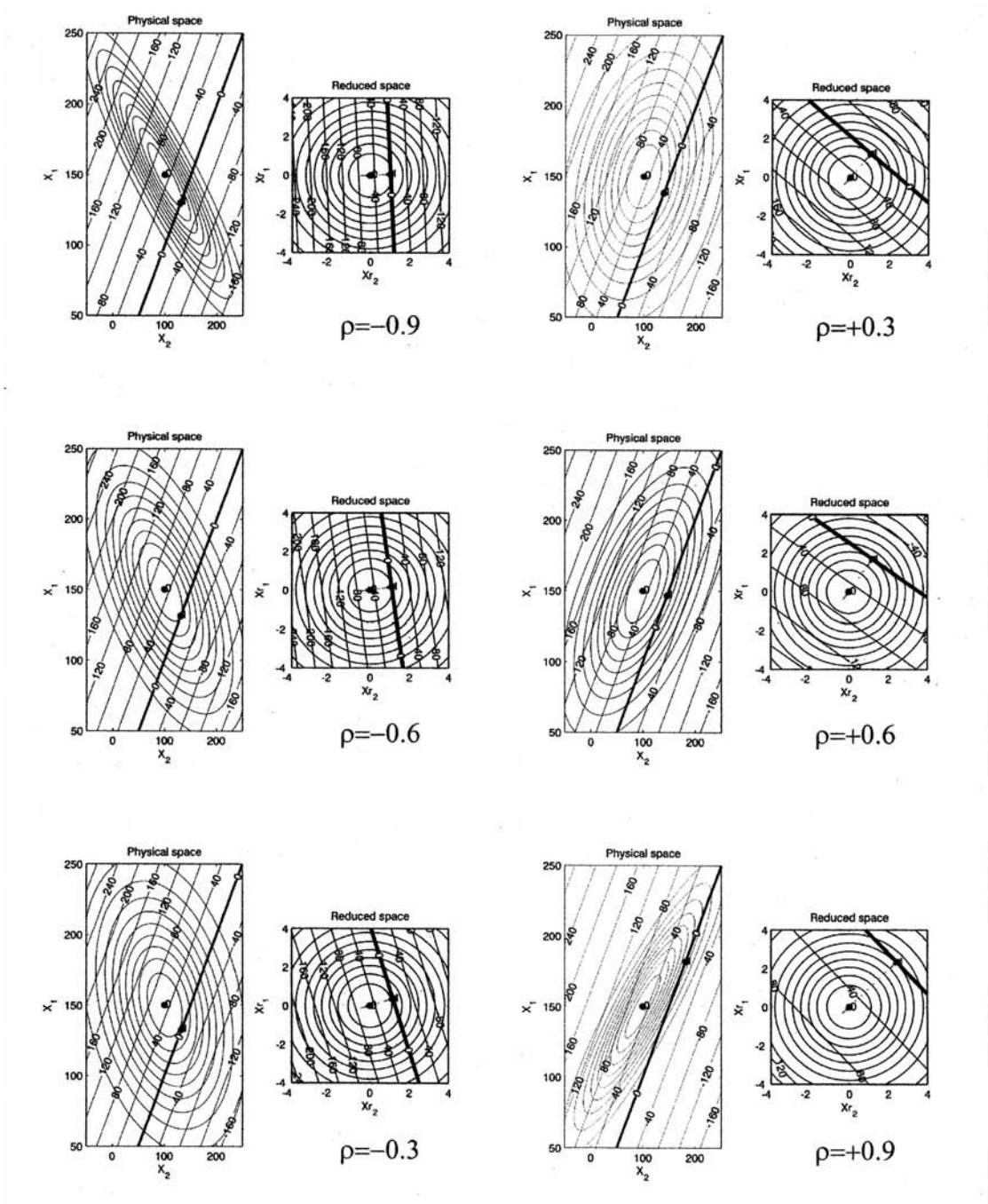

Fig.7

た結果とは完全には一致しない。この理由は変換行列が全く同じ方法によって選択されなかったことに起因する。しかしながら、最終的に得られた設計点、安全性指標の数値、破壊確率は実用的な有効数字の範囲内では一致する。Fig.7 には、種々の数値の相関係数に対する実物理変数空間と換算空間の図および目的点までの収束の状況を示している。

4. おわりに

有限要素法の原点である1自由度を有する構造システムの安定解析問題の確率論的シミュレーションを行った。この問題は本質的に固有値問題であり、1自由度ゆえに閉じた解が求められ、その解に含まれる複数個のパラメーターが確率変数である場合のシミュレーション手法を示し、一般的な確率有限要素解析への指針的資料を提供することができた。また、欧米で非常によく利用されているプログラミング指向可視化ソフトウェアMATLABを利用し、訴求力のある解析結果の表現方法を提案した。

謝辞

本研究は日比科学技術振興財団の研究助成によって行われた研究である。

References

1) Rondal J. and Maquoi R., "Formulation d'AYRTON-PERRY pour le flambement des barres métalliques", Construction Métallique, No.4, 1979.
2) Kusama H., "Lecture Note on Reliability Analysis" (in Japanese), Toyohashi University of Technology and Science, 1994.
3) Kusama H., Ogasawara T. and Itoh T., "Introduction to Finite Element Analysis for Learners" (in Japanese), HBJ Publications, 1991.
4) Kusama H. and Taniyama K., "Finite Strip Method" (in Japanese), Nikkan Kohgyoh Shinbunsha, 1994.
5) Simitses G. J. and Hodges D. H., "Fundamentals of Structural Stability", Elsevier Inc., 2006.
6) Barnes J. W., "Statistical Analysis for Engineers and Scientists; A Computer-Based Approach", McGraw-Hill Inc., 2006.
7) Ang H-S. A. and Tang H. W., "Probability Concepts in Engineering Planning and Design; Volume Ⅰ- Basic Principles", John Wiley & Sons, Inc., 1975.
8) Ang H-S. A. and Tang H. W., "Probability Concepts in Engineering Planning and Design; Volume Ⅱ- Decision, Risk, and Reliability", John Wiley & Sons, Inc., 1984.
9) Melchers E. R., "Structural Reliability Analysis and Prediction", Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
10) Haldar A. and Mahadevan S., "Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 2000.